

GRUNDVORSTELLUNGEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Günther Malle

Hochschullehrer haben oft ihre Lieblingsprüfungsfragen. Günther Malle stellt zum Beispiel gerne die folgende Frage: „Sei $f(x) = x^2$. Wie groß ist $f'(3)$?“ Es hat noch nie jemanden gegeben, der diese Frage nicht beantworten konnte. Alle rechnen brav: $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6$. Aber dann folgt die Zusatzfrage: „Sie haben die Zahl 6 erhalten; jetzt sagen Sie mir bitte, was diese Zahl bedeutet.“ Und ob Sie's glauben oder nicht, darauf kommt fast nie eine Antwort. Meist wird nicht einmal die Deutung von $f'(3)$ als Steigung der Funktion f (bzw. der Tangente) an der Stelle 3 genannt, geschweige denn irgendeine andere Deutung der Ableitung.

Diese Situation ist für den heutigen Mathematikunterricht an Schulen und Hochschulen typisch. Es ist wahrscheinlich der größte Fehler des heutigen Mathematikunterrichts, dass er zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufsteigt und die Dinge auf eine bloß rechnerisch-mechanische Weise erledigt, jedoch verabsäumt, die dahinter liegenden intuitiven und anschaulichen Vorstellungen zu entwickeln. Das beginnt schon in der Volksschule: viele können sich unter dem Multiplizieren nichts vorstellen, obwohl sie schriftliche Multiplikationen ausführen können. Es setzt sich in der Unterstufe fort: Kaum jemand weiß, warum $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ als $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{3}$ gedeutet werden kann, obwohl Brüche rechnerisch durchaus miteinander multipliziert werden können. Und ein Beispiel aus der Oberstufe haben wir gerade gesehen.

Viele Vorstellungen, die hinter mathematischen Inhalten stehen, sind so wichtig und für Allgemeinbildung unverzichtbar, dass man sie als **Grundvorstellungen** bezeichnet. Diese Grundvorstellungen sind nicht angeboren, sie müssen erlernt werden – hauptsächlich im Mathematikunterricht, wo denn sonst? Eine Konsequenz daraus ist die, dass der Mathematikunterricht in vielen Stoffgebieten zweiphasig verlaufen müsste. In einer ersten Phase (inhaltlich-anschauliche Phase) geht es darum, die nötigen Grundvorstellungen zu entwickeln, wobei das Arbeiten mit Regeln zunächst hintan gehalten wird. In einer zweiten Phase (formal-regelhafte Phase) geht es dann darum, den jeweiligen Kalkül zu entwickeln und einzuüben. Leider fällt die erste Phase oft fast völlig unter den Tisch. Kein Wunder, dass österreichische Schülerinnen und Schüler bei internationalen Vergleichsuntersuchungen (TIMSS, PISA) schlecht abschneiden, denn dort werden im Allgemeinen nicht die Kalkültechniken abgeprüft, sondern inhaltliches, auf Vorstellungen fußendes Verständnis.

Warum sind Grundvorstellungen eigentlich so wichtig für (mathematische) Allgemeinbildung? Im Wesentlichen kann man darauf zwei Antworten geben: Grundvorstellungen sind unverzichtbar für mathematisches *Problemlösen* und unverzichtbar für das *Anwenden von Mathematik*. Betrachten wir dazu zwei sehr einfache Beispiele:

Beispiel 1: Prozentrechnen

Warum können österreichische Maturantinnen und Maturanten selbst einfache Prozentaufgaben nicht lösen (wie viele empirische Studien, u.a. TIMSS, zeigen). Das hat ohne Zweifel viele Gründe. Der Hauptgrund ist aber wohl darin zu suchen, dass die zum Prozentrechnen nötigen Grundvorstellungen nicht oder nicht ausreichend entwickelt wurden. Wegen der fehlenden Grundvorstellungen greifen viele Menschen zu irgendwelchen auswendig gelernten, aber nie verstandenen mechanischen Rezepten, was natürlich extrem

fehleranfällig ist und keine Möglichkeit zu einer kritischen Kontrolle des eigenen Vorgehens bietet.

Man kann sämtliche in der Schule üblichen Prozentaufgaben lösen, wenn man die folgenden beiden Grundvorstellungen besitzt (die man auch als Grundwissen bezeichnen kann):

$$1\% = \frac{1}{100} \quad , \quad a\% \text{ von } b = \frac{a}{100} \text{ von } b = \frac{a}{100} \cdot b$$

Dies sei an drei Aufgaben vorgeführt:

- 1** Bei einer Fahrscheinkontrolle wurde festgestellt, dass 8% von 250 kontrollierten Personen ohne Fahrschein waren? Wie viele Personen waren das?

Lösung: x% von y sind z

$$8\% \text{ von } 250 = z$$

$$\frac{8}{100} \cdot 250 = z$$

$$z = 20 \text{ (Personen)}$$

- 2** Von 300 Mitarbeitern eines Betriebes sind 135 Raucher. Wie viel Prozent aller Mitarbeiter sind dies?

Lösung: x% von y sind z

$$x\% \text{ von } 300 \text{ sind } 135$$

$$\frac{x}{100} \cdot 300 = 135$$

$$x = 45 \text{ (\%)}$$

- 3** Bei einer Lebensmitteluntersuchung wurde festgestellt, dass 25 Proben, das sind 6,25% der untersuchten Proben, verdorben waren. Wie viele Proben wurden untersucht?

Lösung: x% von y sind z

$$6,25\% \text{ von } y \text{ sind } 25$$

$$\frac{6,25}{100} \cdot y = 25$$

$$y = 400 \text{ (Proben)}$$

Beispiel 2 : Exponentialfunktionen

Beim Anwenden von Mathematik bilden die Grundvorstellungen unverzichtbare Bindeglieder zwischen dem mathematischen Modell und der zu beschreibenden (meist außermathematischen) Situation. In der Situation entdeckt man gewisse Grundvorstellungen und weiß damit, welche mathematischen Tätigkeiten man auszuführen hat. Umgekehrt entdeckt man im mathematischen Modell gewisse Grundvorstellungen und kann daher die mathematischen Tätigkeiten in der Situation deuten. Fehlen die Grundvorstellungen, dann ist der gesamte mathematische Formalismus mehr oder weniger nutzlos, er ist ein totes Wissen, das man nie anwenden können wird. Er ist genau genommen nur ein Ballast, den man mit sich herumschleppt und berechtigterweise schnell vergisst.

Betrachten wir beispielsweise die folgende Aufgabe:

- 4** Die Beobachtung einer Bakterienkultur auf einer Nährlösung ergibt: Zu Beginn nehmen die Bakterien eine Fläche von 1000 mm^2 ein, die Fläche vergrößert sich pro Stunde um ca. 45%. Es sei $A(n)$ der Inhalt dieser Fläche nach n Stunden. Stelle eine Formel für $A(n)$ auf.

Lösung: $A(n) \approx 1000 \cdot 1,45^n$

Warum schreiben wir bei dieser Aufgabe ganz selbstverständlich eine Exponentialfunktion hin? Warum nicht eine lineare Funktion? Oder eine quadratische Funktion? Oder ... ? Der

Grund dafür ist darin zu suchen, dass wir eine Grundvorstellung über Exponentialfunktionen benutzen:

Exponentielles Wachsen bedeutet, dass in gleichen Zeitabschnitten die Funktionswerte immer um den gleichen Prozentsatz des jeweiligen Ausgangswertes zunehmen.

Diese Grundvorstellung entdecken wir in der vorliegenden Situation (aufgrund des Angabentextes) und wissen daher, dass wir eine Exponentialfunktion ansetzen müssen. Wer diese Grundvorstellung über Exponentialfunktionen nicht besitzt, wird eine Exponentialfunktion bestenfalls gedankenlos hinschreiben können, wird aber nicht verstehen, warum man eine solche Funktion wählt.

Grundvorstellungen bilden heute ein zentrales Thema der Mathematikdidaktik. Am Institut für Mathematik der Universität Wien wird seit über 10 Jahren ein Forschungsprogramm durchgeführt, das sich mit Grundvorstellungen beschäftigt. Es wurden Listen von Grundvorstellungen zu allen Stoffgebieten der Schulmathematik erstellt und Kontrollaufgaben entwickelt, mit denen man das Vorhandensein dieser Grundvorstellungen überprüfen kann. In empirischen Untersuchungen an über 2500 Schülern wurde eruiert, inwiefern diese Grundvorstellungen bei unseren derzeitigen Schülerinnen und Schülern vorhanden sind. Die Ergebnisse können in zwei Worten zusammengefasst werden: eine Katastrophe! Grundvorstellungen sind weitgehend nicht oder nicht ausreichend vorhanden.

In der Schwerpunktgruppe S1 von IMST² werden daraus Konsequenzen gezogen. Seit September 2003 wird in dieser Schwerpunktgruppe unter der Leitung von Günther Malle ein Unterrichtsversuch durchgeführt, an dem 12 Lehrerinnen und Lehrer teilnehmen. Dabei wird exemplarisch anhand einiger Stoffgebiete (lineare Funktionen, Exponentialfunktionen, Differentialrechnung) ein Unterricht abgehalten, der gezielt auf die Entwicklung von Grundvorstellungen angelegt ist. Die teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten eine Liste von einschlägigen Grundvorstellungen und als methodische Unterstützung einen lehrbuchartigen Text mit vielen Aufgaben, die in Hinblick auf Grundvorstellungen analysiert wurden. In eigenen Zusammenkünften und auf den Workshops wird das Vorgehen im Unterricht genau besprochen. Am Schluss erfolgt eine Evaluation durch einen Test, der das Vorhandensein der jeweiligen Grundvorstellungen überprüft. Die Evaluation wird noch unterstützt durch fallweise Videoaufnahmen sowie Interviews mit Schülerinnen und Schülern, die von Gertraud Benke durchgeführt werden. Wir hoffen, bessere Ergebnisse zu erzielen als diejenigen in den vorhin genannten empirischen Untersuchungen.